**PIV uncertainty propagation**

**Рост неопределенности (погрешности) PIV**

**Andrea Sciacchitano and Bernhard Wieneke**

**Aerospace Engineering, TU Delft, Netherlands**

**LaVision GmbH, Göttingen, Germany**

В этой статье обсуждается распространение мгновенной неопределенности измерений PIV на статистические и мгновенные интересующие величины, полученные из поля скоростей. Выведено выражение неопределенности завихренности, расходимости скорости, среднего значения и напряжений Рейнольдса. Показано, что неопределенность завихренности и расходимости по скоростям требует знания пространственной корреляции между погрешностью смещения изображения *x* и *y* частицей, которая зависит от пространственного разрешения измерения. Неопределенность статистических величин часто характеризуется случайной неопределенностью из-за конечного размера выборки и уменьшается с квадратным корнем из эффективного числа независимых выборок. Моделирование методом Монте-Карло проводится для оценки точности формул распространения неопределенности. Кроме того, проводятся три экспериментальных оценки. В первом эксперименте поворотный стол используется для моделирования жесткого поля потока вращения. Оценочная неопределенность завихренности сравнивается с фактической ошибкой завихренности среднеквадратичной величины с разницей между двумя величинами в пределах 5-10% для разных размеров окна опроса и коэффициентов перекрытия. Во второй экспериментальной оценке исследован турбулентный струйный поток. Опорная скорость, которая используется для вычисления опорного значения мгновенных свойств текучести, представляющих интерес, получают с помощью вспомогательной системы PIV, которая включает более широкий динамический диапазон, чем система измерения. Наконец, количественная оценка неопределенности статистических величин оценивается с помощью измерений PIV в потоке полости. Сравнение между оцененной неопределенностью и фактической ошибкой демонстрирует точность предлагаемой методологии распространения неопределенности.

d расстояние между соседними точками сетки

f фокусное расстояние объектива

F общая функция

FOV поле обзора

f # относительное число объектива (апертура)

facq частота сбора данных

Lsr\* длина пространственного разрешения

Lsr длина пространственного разрешения относительно вектора расстояние d

N число измеряемых переменных; полученная выборка

Hефф эффективное количество независимых выборок

npix линейный размер (в пикселях) окна запроса PIV

Ruu, Rvv, Rww рейнольдсовы нормальные напряжения

Ruu, true, Ruu, corr исправленные рейнольдсовы нормальные напряжения

Ruv рейнольдсовы касательные напряжения

T общее время записи

Tint масштаб суммарного времени

TKE турбулентная кинетическая энергия

U горизонтальная составляющая скорости

U̅ средняя скорость

U ' пульсационная составляющая скорости

U 'true правильная пульсационная составляющая скорости (в отсутствие ошибки измерения)

Ux неопределенность величины x

U̅u2 дисперсия неопределенности u

U U̅u2 неопределенность дисперсии неопределенности(погрешности) u

Uurms среднеквадратичная усредненная неопределенность u

v компонент вертикальной скорости

w поперечный компонент скорости

x измеренная переменная; горизонтальная координата

x̅ среднее значение величины x

y получкнная интересующая величина; вертикальная координата

Δt интервал времени между последовательными образцами (обратная частота сбора данных)

δx погрешность измерения величины x

ρ (x, y), ρxy коэффициент взаимной корреляции между x и y

σx стандартное отклонение x

σUu стандартное отклонение неопределенности u

σu, err2 дисперсия ошибок в измерениях

σu, fluct 2 дисперсия флуктуаций физического потока

σxy2 ковариация между x и y

σx2 дисперсия x

ω завихренность

ω0 опорная завихренность

ωz компонент завихренности нормальный к плоскости

1. **Введение**

Количественная оценка неопределенности в PIV имеет решающее значение для определения интервала, который содержит ошибку измерения. Недавно было предложено несколько методов, количественной оценки неопределенности PIV основанных на экспериментальных данных для оценки неизвестной ошибки для каждого вектора скорости в поле потока.

 В методе «поверхности неопределенности» Тимминса и др. (2012) . записанные изображения анализируются для количественной оценки величины соответствующих источников ошибок (размер частиц частиц, плотность частиц, смещения и сдвиг). Сравнение с ранее вычисленными ошибками с использованием синтетических данных приводит к оценке неопределенности для каждого вектора. Метод «пикового отношения» Харонко и Влахоса (2013) использует эмпирическую связь между неопределенностью и соотношением между самым высоким и вторым пиком максимальной корреляции. Дальнейшие достижения по количественной оценке неопределенности измерений, основанные на соотношении сигнал / шум по взаимной корреляции, были предложены Xue и др. (2014). В «сопоставлении изображений» или «несогласованности частиц» по методу Sciacchitano et al (2013) измеренное поле смещения используется для деформирования записанных изображений, а остаточное несоответствие в позиции совпадающих изображений частиц приводит к оценке неопределенности вектора смещения. Наконец, метод корреляционной статистики Wieneke (2015) анализирует вклад всех интенсивностей пикселей в возможную асимметрию корреляционного пика, связанного с неопределенностью вектора смещения. Все эти методы позволяют получить количественную оценку мгновенной неопределенности измерений на основе экспериментальных данных. Подробное сравнение их характеристик в разных условиях изображения и потока описано в Sciacchitano et al (2015), где используются специальные экспериментальные данные от Neal et al (2015).

Во многих приложениях проводятся измерения PIV для исследования свойств течения, полученных из поля скоростей, которые могут быть мгновенными (например, завихренность, дивергенция скорости, ускорение, скорость диссипации турбулентности, давление) или статистические величины (например, среднее время и напряжения Рейнольдса). Поэтому, как только оцениваются неопределенности мгновенных компонентов скорости, их необходимо размножать в интересующие производные величины. Количественная оценка неопределенности производных величин зависит от следующих соображений:

i) неопределенность компонентов скорости распространяется на неопределенность производной величины, представляющей интерес;

II. корреляция (в пространстве, времени и / или межкомпонентном) компонентов скорости влияет на неопределенность производных величин;

III. для статистических величин дополнительная неопределенность обусловлена конечным числом выборок N, что приводит к отсутствию статистической сходимости.

Работы Вильсона и Смита (2013a, 2013b) обеспечивают верхнюю и нижнюю границы неопределенности для ряда статистических величин, таких как среднее, дисперсия и ковариация. В своем анализе авторы рассмотрели вклад случайных ошибок, в основном из-за конечного размера выборки и неизвестных зависящих от времени систематических ошибок. Для дисперсии скорости и ковариации более низкая граница неопределенности оказалась более высокой, чем верхняя неопределенность, поскольку паразитные флуктуации имеют тенденцию повышать усредненные по времени измеренные флуктуации, что приводит к ошибке в отрицательном направлении. В представленной здесь работе количественная оценка неопределенности предоставляется для многих часто используемых производных величин при обработке PIV, как статистической, так и мгновенной.

1. **Методика распространения неопределенности**

Рассмотрим полученную интересующую величину y, которая является общей функцией F N измеренных переменных xi, от i =1, 2, ..., N. Предполагая, что каждая переменная xi имеет стандартное отклонение σxi и при условии достаточной линейности F, дисперсию y можно аппроксимировать матрицей дисперсии-ковариации F (Bendat и Piersol 2010):

где ρ (xi, xj) - коэффициент взаимной корреляции между xi и xj, определяемый:

Заметим, что когда xi и xj независимы, то ρ (xi, xj) = 0, а уравнение (3) сводится к:

Уравнение (3) можно интерпретировать двумя способами. Во-первых, считая, что множество входных переменных xi измеряется много раз, каждый раз, получая выходную переменную yj, стандартное отклонение σy обеспечивает меру флуктуации полученных yj. Во-вторых, σy обеспечивает меру неопределенности Uy y для одного измерения с учетом стандартных неопределенностей Uxi каждая входная переменная xi (Coleman and Steele):

где ρ (δxi, δxj) теперь является коэффициентом взаимной корреляции между ошибками xi и xj, которые обозначены соответственно δxi и δxj. Это уравнение будет широко использовано в следующем.

 В настоящей работе неопределенность мгновенных компонентов скорости определяется количественно с помощью метода статистики корреляции (Wieneke 2015). Уравнение (6) показывает, что оценка неопределенности y запрашивает знания о взаимной корреляции между векторами скорости, разделенными во времени пространстве или между компонентами. Большинство методов PIV-UQ не могут вычислять такие значения из одиночных окон опроса. Значения ρ обычно определяются заранее для конкретного набора параметров обработки PIV, например. методом Монте-Карло с синтетическими данными, аналогичным методу поверхности неопределенности Тимминсом и др. (2012), в котором анализируются локальные условия формирования изображения и потока и просматривается соответствующее потенциально искаженное и предвзятое распределение ошибок. Более подробная информация о вычислении пространственной / временной корреляции ошибок приведена в следующих разделах.

* 1. **Средние статистические величины**

Учитывая набор отсчетов x = {x1, x2, ..., xN}, записанных с течением времени, временное среднее значение, стандартное отклонение и дисперсия x определяются соответственно:

Учитывая два набора выборок x и y, ковариация cov (x, y) или

σxy 2 между ними определяется как:

 Заметим, что уравнения (7) - (10) обеспечивают среднее стандартное отклонение и дисперсию для (обследуемой) выборки. Эти значения представляют собой оценки соответствующих значений для генеральной совокупности, которые включают в себя совокупность всех выборок (а не только те, которые были получены во время измерения). Точность оценки возрастает при увеличении N; оценки точны для N → ∞.

Предполагая, что образцы независимы и следуют нормальное распределение стандартного отклонения σx, стандартная неопределенность вышеуказанных величин (Бенедикт и Гулд 1996):

Неопределенность среднего значения:

Неопределенность дисперсии:

Наконец, неопределенность ковариации есть (Bendat и Piersol 2010): где ρxy - коэффициент взаимной корреляции между x и y.

Эти уравнения справедливы для достаточно больших N. Ahn and Fessler (2003), что при N ⩾ 30 эти формулы точны в пределах 1%. Для меньшего количества образцов формулы обычно недооценивают фактическую стандартную неопределенность до 10%, а для среднего, стандартного отклонения и дисперсии следует использовать поправочные коэффициенты, чтобы сделать их объективными (Coleman and Steele 2009). Результаты уравнений (11) - (14) будут использоваться в дальнейшем для определения неопределенности статистических величин, представляющих интерес для турбулентных потоков.

* + 1. **Uncertainty of the mean velocity**

Рассмотрим общую составляющую скорости u. На основании уравнений (7) и (11) неопределенность средней скорости u равна:

Получены аналогичные уравнения для скорости v и w компоненты. В уравнении (15) систематические неопределенности из-за ошибок пространственной модуляции или блокировки пиков не учитываются. Стандартное отклонение σu содержит как истинные флуктуации скорости (σu, флуктуации), так и ошибки измерения (σu, err):

где Uu - неопределенность мгновенной скорости компонент и Uu2 - средний квадрат Uu. Правая часть уравнения (16) получается, учитывая, что дисперсия ошибки σu, err 2 приблизительно равна среднему квадрату неопределенности Uu 2 для точных методов количественной оценки неопределенности (см. Приложение Sciacchitano et al 2015).

Когда данные являются зависимыми, параметр N уравнения (15) должен быть заменен эффективным числом независимых образцов Neff, как описано в разделе 2.2.3.

* + 1. Неопределенность напряжений Рейнольдса

Напряжения Рейнольдса играет решающую роль в турбулентных потоках, поскольку оно представляет собой скорость передачи среднего импульса турбулентными флуктуациями. В этом разделе выражение неопределенности получено для нормального напряжения Рейнольдса и для напряжения сдвига Рейнольдса.

Нормальное напряжение Рейнольдса. Нормальное напряжение Рейнольдса для компонента скорости x определяется как дисперсия u:

где u’ – пульсационная составляющая u. Из-за его определения неопределенность Ruu вычисляется с помощью уравнения (13):

Предполагается, что образцы статистически независимы. Если нет, то N снова должно быть заменено эффективным числом независимых образцов Neff (раздел 2.2.3). Как обсуждалось в разделе 2.2.1, σu содержит как эффекты истинных флуктуаций скорости, так и паразитные флуктуации из-за шума. Последние, дают переоценку для Ruu по отношению к истинному значению Ruu, true:

Когда известна неопределенность измеренной скорости, скорректированная (более точная) оценка Ruu может быть получена путем вычитания среднего квадрата колебаний Uu 2 из измеренного напряжения Рейнольдса:

Таким образом, согласно уравнению (6), неопределенность скорректированной нормальной оценки напряжений Рейнольдса Ruu, corr, обозначенная UR uu, corr, определяется следующим образом:

Последний состоит из двух компонентов: (а) неопределенности измеренного напряжения Рейнольдса, которое определяется уравнением (18); (б) неопределенность ложных флуктуаций означает квадрат Uu 2. Обратите внимание, что Uu 2 может принимать только положительные значения, поэтому его распределение лучше аппроксимируется логарифмически-нормальным распределением, а не гауссовским распределением. По крайней мере, при аппроксимации распределения с распределением Гаусса с положительным средним аналитическое выражение неопределенности Uu 2 может быть получено с использованием уравнения (6):

Точность уравнения (22) оценивается в разделе 3.1. Объединяя оба уравнения (18) и (22), неопределенность Ruu, corr:

Во многих приложениях погрешность измерения мала по отношению к фактическим флуктуациям скорости, поэтому член в скобках пренебрежимо мал и уравнение (23) сводится к:

На практике неопределенность нормального напряжения Рейнольдса согласно (23) и (24) часто сильно недооценивается по двум причинам. Во-первых, вычитание уравнения (20) подчиняется точности самого метода квантования неопределенности. Как показано Sciacchitano et al (2015), оценки неопределенности современных методов UQ могут отклоняться от истинных ошибок на два порядка для разных условий потока и изображения. Во-вторых, конечное пространственное разрешение алгоритма обработки PIV не позволяет разрешать флуктуации масштаба длины меньше, чем близкой к размерам окна опроса. Это может привести к существенной недооценке Ruu в зависимости от числа Рейнольдса, турбулентного уровня и увеличения изображения.

Важно отметить, что вычисление неопределенности Ruu согласно уравнению (18) не требует знаний неопределенности мгновенной скорости. С другой стороны, для расчета скорректированного значения Ruu, corr необходимо знать неопределенность мгновенной скорости.

Турбулентная кинетическая энергия

Турбулентная кинетическая энергия TKE определяется как половина суммы нормальных напряжений Рейнольдса:

На основе формулы распространения ошибки (6) неопределенность TKE равна:

Предполагая, что N>>1 и что мгновенная неопределенность измерения пренебрежимо мала относительно флуктуаций скорости, можно использовать результат уравнения (24), а выражение UTKE сводится к:

Когда Rww неизвестно (например, в планарной PIV, которая обеспечивает только две компоненты скорости), ее значение можно оценить как Rww= (Ruu+Rvv) / 2 в предположении изотропной турбулентности.

Касательные напряжения Рейнольдса

Касательные напряжения Рейнольдса Ruv определяется как ковариация компонентов скорости u и v:

Величина ρuv - коэффициент взаимной корреляции между компонентами скорости u и v. Предполагая, что на флуктуации скорости влияют ошибки δu и δv соответственно, а погрешность усредненной по времени скорости пренебрежимо мала, уравнение (28) становится :

В уравнении (29) ρδuδv - коэффициент взаимной корреляции между ошибками двух компонентов скорости. Предполагается, что истинные флуктуации скорости не зависят от погрешностей измерения, тем самым пренебрегаются перекрестные члены. Как следствие, напряжение сдвига Рейнольдса Ruv проявляет систематическую погрешность (равную …), только если δu и δv коррелированы (ρδuδv ≠ 0); однако, как правило, это не относится к плоскому 2 C-PIV. И наоборот, для стерео-PIV могут быть ненулевые взаимные корреляции компонентов, зависящие от экспериментальной установки двух камер относительно оси x и y. Неопределенность Ruv получается путем применения уравнения ковариационной неопределенности (14):

Неопределенность касательного напряжения Рейнольдса имеет минимальное значение, когда u и v некоррелированы и увеличивается с большей корреляцией между двумя компонентами скорости.

Эффективное количество независимых образцов. Рассмотрим общую статистическую величину, как среднее x. В этом разделе мы покажем, что если N выборок, из которых вычисляется x, не являются независимыми, ожидается большая неопределенность x. Действительно, из уравнения (6) получается: предположив постоянное лежащее в основе распределение флуктуации … . Коэффициент автокорреляции ρ (xi, xj) можно записать в виде: с Δt - обратной частотой дискретизации. Коэффициент автокорреляции ρ является функцией временного разделения nΔt между выборками xi и xj = xi + n. В результате уравнение (31) можно записать в виде:

Величина ρ (nΔt) равна единице при n = 0 и убывает до нуля при увеличении n. Кроме того, ρ (nΔt) является четной функцией: ρ (nΔt) = ρ (-nΔt). Полагая N → ∞ и пренебрегая краевыми эффектами в суммировании, уравнение (33) становится:

Определение эффективного количества независимых образцов как: приводит к:

Как правило, суммирование уравнения (35) прекращается, когда значение корреляции достигает нуля в первый раз. Обратите внимание, что когда образцы некоррелированы, тогда ρ (nΔt) равно 1 при n = 0 и нулю в противном случае, поэтому в этом случае Neff = N. Обратно, когда отсчеты коррелируются, то; поэтому Neff меньше N, поэтому неопределенность среднего значения больше.

Интегральная временная шкала Tint определяется как интеграл функции автокорреляции ρ (t) временного ряда x (t) (George et al 1978):

Tint - это мера временного интервала, на котором x(t) зависит от самого себя. Для временных интервалов, больших по сравнению с Tint, x (t) становится статистически независимым от самого себя. Тогда эффективное число независимых выборок может быть записано как функция времени наблюдения T и интегрального временного масштаба Tint.

Уместность уравнений (36) и (38) для экспериментальных измерений в турбулентных течениях обсуждается, в частности, Теннеком и Ламли (1972). Уравнения иллюстрируют тот факт, что при Δt <Tint и общем времени наблюдения T фиксируется, увеличивая частоту дискретизации и, следовательно, количество выборок не улучшает точность полученных статистических величин (Taylor 1997), поскольку эффективное число независимые образцы остаются постоянными. Вместо этого предпочтительно ограничить частоту дискретизации 1 / (2Tint) и увеличить время записи T.

2.3 Мгновенные величины

Рассмотрим плоское PIV-измерение, в котором компоненты скорости (u, v) измеряются в 2D-области. Компонент завихренности, лежащей вне плоскости определяется как:

Напомним что для краткости мы отбросим индекс z, и мы укажем компоненты завихренности компоненты лежащей вне плоскости с помощью ω. Компоненты скорости u и v являются дискретными функциями, определенными в точках сетки с равномерным расстоянием d (как в направлении x, так и в y). В качестве примера, завихренность может быть вычислена схемой центрально-разностной схемы:

Другие методы, использующие большие размеры ядра, доступны за счет более низкого пространственного разрешения поля завихренности. Используя формулу распространения ошибки (6), неопределенность вихря в точке сетки (x, y) равна (кроме ошибок усечения): где были сделаны следующие предположения:

Ошибки u и v в тех же или соседних пространственных местоположениях некоррелированы (2C-PIV).

Ошибки u (x, y + d) и u (x, y - d) пространственно коррелированы (и аналогично ошибки v (x + d, y) и v (x - d, y)). Соответствующий коэффициент взаимной корреляции, обозначенный р (2d), считается одинаковым для двух компонентов скорости. Он представляет собой нормированную взаимную корреляцию ошибки измерения в двух точках сетки при пространственном разделении 2d.

Неопределенность u (x, y + d) считается равной неопределенности u (x, y - d) и обозначается Uu. Точно так же неопределенность v (x + d, y) считается равной неопределенности v (x - d, y) и обозначается Uv. На практике может быть проведено соответствующее локальное среднее значение неопределенностей.

Если далее предположить, что две компоненты скорости имеют одинаковую неопределенность (Uu = Uv = U), выражение неопределенности вихря упрощается:

Уравнение (42) показывает пропорциональность между неопределенностями завихренности и скорости. Интервал сетки d имеет двойной эффект на Uω: с одной стороны, Uω обратно пропорционален d, что приведет к уменьшению Uω при увеличении d. С другой стороны, увеличение d дает уменьшение коэффициента пространственной кросс-корреляции и, в свою очередь, увеличение члена с квадратным корнем. Когда перекрытие окна опроса увеличивается, d стремится к нулю быстрее, чем (…): как следствие, неопределенность вихря увеличивается (см. Рисунок 1). Однако следует иметь в виду две вещи: (а) уравнение (42) учитывает только случайные ошибки завихренности, а не ошибки усечения, которые систематичны и уменьшаются при увеличении перекрытия окна опроса; (б) неопределенность вихря может быть уменьшена путем вычисления пространственных производных с использованием большего расстояния в конечных разностях (например, используя (…). Для шумных данных Vollmers (2001) сообщает, что более низкая неопределенность может быть достигнута путем вычисления завихренности от циркуляции потока, а не через уравнения (39) и (40). Линейное распространение ошибок может быть использовано для оценки неопределенности завихренности, вычисленной с использованием современных алгоритмов; определение и анализ этой неопределенности выходит за рамки настоящего документа.

Можно показать, что уравнение (42) также соответствует неопределенности двумерной расходимости скорости. И наоборот, для 3D-расходимости в томографическом PIV получается следующее выражение неопределенности:

Вышеприведенные выводы могут быть изменены соответствующим образом, когда центрально-разностная схема заменена более сложными функциями, например. с помощью алгоритма Левенберга-Маркварда по размеру ядра 3 × 3 или 5 × 5. Для stereoPIV с ненулевыми корреляциями между u и v в приведенных выше уравнениях должны учитываться дополнительные члены. Количественная неопределенность в отношении стерео-PIV, включая оценку ошибок калибровки, будет подлежать будущей работе.

2.3.2. Пространственно усредненные величины. Когда составляющая скорости пространственно усредняется по профилю, области или объему, неопределенность среднего может быть рассчитана либо по уравнению (11) с использованием флуктуаций векторов скорости, либо, альтернативно, путем вычисления среднего как простой функции и распространяя отдельные неопределенности скорости согласно уравнению (6). Обычно предпочтительнее второй вариант, поскольку среднее значение следует рассматривать здесь как мгновенное количество, а не как статистически конвергентное значение. Чаще всего базовое среднее и стандартное отклонение будут в любом случае различны в разных пространственных местоположениях. Только в случае усреднения по изотропной однородной турбулентности с достаточными точками данных можно попытаться измерить турбулентные статистические значения; даже в этом случае было бы более точно записывать большое количество изображений с течением времени для несмещенной статистики.

Вывод неопределенности среднего производится так же, как в уравнениях (31) - (36), заменяя стандартные отклонения неопределенностями и заменяя временную корреляцию компонентов скорости с пространственной корреляцией ошибок скорости, которые тесно связаны связанных с пространственным разрешением схемы обработки PIV.

Рассмотрим 1D-случай с N значениями u-составляющей скорости, усредненной вдоль профиля в направлении x: Согласно уравнению (6), неопределенность среднего значения: где для упрощения произведение индивидуальных неопределенностей U u i Uuj заменяется средней квадратичной неопределенностью U 2u. Пространственные коэффициенты автокорреляции ρ (δui, δuj) могут быть записаны как функция интервала векторной сетки d: где n - количество точек сетки между местоположениями i и j. Пренебрегая краевыми эффектами, т. Е. Требуя больших N, уравнение (45) приводит к:

Опять же, эффективное количество независимых выборок может быть определено как: Таким образом: определив среднюю среднеквадратичную неопределенность Uu rms . Интеграл коэффициентов автокорреляции можно определить как пространственное разрешение Lsr алгоритма PIV, которое в единицах пикселей равно: Пространственное разрешение также может быть записано относительно вектора d:

В 2D-случае, когда среднее значение выполняется над областью векторов Nx × Ny, уравнение (48) становится: с L \*sr снова в единицах векторного интервала и предполагая такое же пространственное разрешение по x и y. Это, например, не относится к продвинутым локально адаптивным схемам PIV с удлиненными окнами, например. приспосабливаясь к границам. Для однопроходной схемы обработки PIV с квадратным окном опроса пикселя n pix × npix корреляционная функция ρ (x) является функцией треугольника (1 – nx/pix) для | x | ⩽ npix и 0 в противном случае. Следовательно, пространственное разрешение просто Lsr = npix. Для гауссовского взвешенного окна опроса со стандартным отклонением σ можно показать, что пространственное разрешение равно Lsr = 4πσ. Для современных PIV-алгоритмов, использующих многопроходную (итерационную) деформацию окна (например, DaVis 8), было обнаружено, что корреляционная функция - при аппроксимации алгоритма PIV как функции линейного пространственного фильтра - является гауссовской с небольшим отклонением в виде мексиканской шляпы, что ведет к небольшому превышению скорости для функций с сильными перепадами скоростей, наблюдаемое Elsinga и Westerweel (2011). Подробный анализ выходит за рамки этой работы.

На практике коэффициенты корреляции и пространственное разрешение необходимо указывать для определенного набора параметров обработки PIV. Когда процесс усреднения проводится с небольшим числом векторов над областью, сравнимой с пространственным разрешением, упрощающие предположения, которые привели к уравнению (49), уже недействительны. В этом случае неопределенность пространственного среднего должна быть вычислена через уравнение (6), где должны учитываться все коэффициенты индивидуальной корреляции.

2.3.3. Пространственная корреляция ошибки измерения. Ошибки соседних векторов пространственно коррелированы из-за перекрытия окна опроса. Чтобы исследовать пространственную корреляцию ошибки, проводится симуляция Монте-Карло с учетом поля нулевого перемещения. Изображения имеют разрешение 5000 × 400 пикселей с концентрацией посева 0,05 ppp. Образцы частиц имеют профиль интенсивности Гаусса с пиковой интенсивностью 1024 отсчета; их диаметр равен 2 пикселям. Шум добавляется к записям (белый фоновый шум со стандартным отклонением 5 отсчетов и фотонным флуктуационным шумом, предполагая коэффициент преобразования 4 электрона на счет), чтобы вызвать ошибки в измеренной скорости. Изображения обрабатываются коммерческим программным обеспечением DaVis 8.2 от LaVision. Функция автокорреляции ρ ошибки измерения вычисляется для исследования пространственной корреляции между соседними векторами. Результаты на рисунке 2, которые относятся к случаю размера гауссово-взвешенного окна запроса 32 × 32 пикселя с перекрытием 75%, показывают, что значительная корреляция присутствует до интервала выборки 3d. Заметим, что в этом случае ρ (2d) ≅ 0,45; следовательно, пространственная корреляция ошибки актуальна и не может не учитываться при вычислении неопределенности завихренности через уравнение (42). Обратите внимание, что вышеупомянутая смесь гауссовской и мексиканской фильтрующей функции фильтра PIV приводит к незначительному расхождению значений корреляции ниже нуля.

1. **Численная оценка методом Монте-Карло**

3.1. Неопределенность статистических величин

 Неопределенность среднего, стандартного отклонения, дисперсии и среднего квадрата подтверждается симуляциями Монте-Карло. Для каждого размера выборки N обычно распределенные случайные данные генерируются с x = 1 и σ x = 0,3, а статистические интересующие величины вычисляются. Процедура повторяется 1000 раз для оценки стандартного отклонения среднего, стандартного отклонения, дисперсии и среднего квадрата. Результаты моделирования Монте-Карло сравниваются с теоретическими предсказаниями уравнений (11) - (13) и (22). Процедура повторяется 1000 раз для оценки стандартного отклонения среднего, стандартного отклонения, дисперсии и среднего квадрата. Результаты моделирования Монте-Карло сравниваются с теоретическими предсказаниями уравнений (11) - (13) и (22). Неопределенность среднего, стандартного отклонения и среднего квадрата линейно возрастает с σx / x в диапазоне [0, 1]. Напротив, неопределенность дисперсии имеет квадратичное увеличение согласно уравнению (13).

3.2. Неопределенность вихря

Моделирование методом Монте-Карло проводится для оценки точности оценки неопределенности, заданной уравнением (42). Поле нулевой скорости (u = 0, v = 0) рассматривается в 2D-области, состоящей из 1000 × 100 точек сетки, что дает пустое поле точной завихренности ω = 0; таким образом, любая измеренная завихренность непосредственно обеспечивает истинную ошибку. Интервал сетки устанавливается равным d = 8 px, что является типичным значением, полученным с окнами запросов 32 × 32 px с перекрытием 75%. Гауссовский шум добавляется в поле скоростей для имитации ошибки, возникающей при измерениях PIV. Шум пространственно коррелирован, чтобы имитировать эффект перекрытия окна опроса в PIV. Стандартное отклонение шума, которое совпадает с неопределенностью измерения U, изменяется от 0,02 до 0,3 px. Рассмотрены три значения коэффициента взаимной корреляции ρ (2d), а именно 0, 0,11, 0,45. Эти значения представляют собой коэффициент взаимной корреляции, встречающийся в PIV для коэффициентов перекрытия 0, 50 и 75%. Результаты усредняются (через среднеквадратичное значение) во всей области измерения и для общего количества 1000 полей скорости для каждого значения ρ. Пример поля мгновенной горизонтальной скорости и поля вихря показан на рисунке 4.

Результаты на рисунке 5 показывают отличное согласие между неопределенностью, полученной с помощью моделирования Монте-Карло, и с теоретическим распространением неопределенности (уравнение (42)). Как и было предсказано, неопределенность вихря возрастает линейно с неопределенностью скорости. Замечено также, что пространственная корреляция погрешности измерения (ρ = 0,45) приводит к уменьшению в 5 раз по Uω по отношению к случаю, когда ошибка некоррелирована (ρ = 0).

3.3. Эффективное количество независимых образцов

Влияние эффективного числа независимых выборок на точность статистических результатов при исследовании методом Монте-Карло. Рассматриваются три сигнала, каждый из которых состоит из N = 10 000 образцов и имеет фактическое среднее и стандартное отклонение, равное 1,0 и 0,3 соответственно. Сигнал x1 составлен статистически независимыми образцами, тогда как образцы сигналов x2 и x3 статистически зависимы. Интегральная шкала времени сигналов оценивается по функции автокорреляции (ρ1, ρ2 и ρ3 соответственно) через уравнение (37) (см. Рисунок 6). Затем эффективное число независимых выборок вычисляется по уравнению (38) и сообщается в таблице 1. Для каждого сигнала вычисляется среднее значение. Моделирование повторяется 1000 раз, чтобы вычислить стандартное отклонение оцененного среднего. Последнее сравнивается с теоретическим предсказанием уравнения (15). Результаты на рисунке 7 показывают превосходное согласие между методом Монте-Карло и теоретическим предсказанием: неопределенность среднего уменьшается с 1 / Neff, даже если общее количество выборок N одинаково для трех сигналов.

4. **Экспериментальная оценка**

4.1 Эксперимент с вращающимся столом

Первая экспериментальная проверка была проведена с использованием поворотного стола с диаметром 30 см, вращающимся с постоянной скоростью. Печатный рисунок с небольшими частицами (размером около 200 мкм) наносится на стол поворота для имитации частиц потока. Изображения были получены с помощью камеры PCO Dimax S4 (датчик CMOS, разрешение пикселов 2016 × 2016, шаг пикселя 11 мкм, 12 бит, максимум 1279 кадров в секунду при полном разрешении), см. Рисунок 8 (a). Камера смонтировала объектив Nikkor с фокусным расстоянием 28 мм, а f-номер был установлен на 4.0. Камера была размещена на расстоянии около 1 м от поворотного стола, что обеспечило кратность увеличения 0,027. Диффузор был установлен между камерой и объективом, чтобы размыть изображение, чтобы подавить ошибки пик-локинг эффекта. Частота приема составляет 1 кГц с исследуемой областью 980 × 1080 пикселей. Освещение было обеспечено светодиодным источником света. Скорость вращения поворотного стола была установлена равной 37 об / мин (0,61 Гц), что обеспечивало равномерную завихренность ω0 = 0,007 58 px / px. Поскольку точная завихренность известна, разница между измеренным и точным значением дает погрешность завихренности. Последняя величина сравнивается с неопределенностью, оцененной линейным распространением (уравнение (42)).

Изображения обрабатывались с помощью программного обеспечения LaVision DaVis 8.2, используя окно запроса 32 × 32 пикселя и коэффициент перекрытия 75%. Поле мгновенной завихренности со скоростными векторами показано на рис. 8 (б). Среднеквадратичная ошибка смещения x и стандартное отклонение погрешности завихрения показаны на рисунках 8 (с) и (е) соответственно: обе ошибки ниже в нижней части поля зрения и увеличения верхней части из-за уменьшения интенсивности освещения. Неопределенность измеренного смещения была определена количественно с

помощью подхода корреляционной статистики (Wieneke 2015). Проверено, что неопределенность Uv компонента вертикального смещения (не показана здесь) сравнима с Uu. Неопределенность вихря извлекается из неопределенности смещения по уравнению (42), используя U = (Uu + Uv) / 2 и ρ (2d) = 0,45. На рисунках 8 (d) и (f) показано среднеквадратичное значение неопределенности смещения и завихренности соответственно: оба результата очень хорошо согласуются со статистической истинной ошибкой (рисунки 8 (c) и (e)) и воспроизводят увеличение неопределенности от нижней к верхней части поля зрения.

Измерения повторялись для разных коэффициентов перекрытия (0%, 25%, 50% и 75%) и размеров опрашиваемого окна 16 × 16 и 32 × 32 px. Неопределенность завихренности, вычисленная по уравнению (42), была усреднена по пространству и времени по всему набору из 200 полей и сравнивалась с среднеквадратичным значением ошибки вихря. Результаты сравнения проиллюстрированы на рисунке 9. Согласование распространения неопределенности из уравнения (42) и истинной неопределенности (обусловленное фактической погрешностью завихренности) очень хорошее. На рисунке 9 показано, что неопределенность вихря увеличивается с уменьшением размера окна опроса, поскольку меньше носителей информации содержится в меньшем окне. Кроме того, неопределенность возрастает с коэффициентом перекрытия, поскольку меньший интервал сетки приводит к большей неопределенности завихренности согласно уравнению (42). Однако важно заметить, что большие коэффициенты перекрытия приводят к более высокому пространственному разрешению поля завихренности (меньше d), что в общем случае относится к меньшим ошибкам усечения и более высоким пиковым вихревым уровням за счет более высоких шумов.

4.2. Турбулентный поток

Методика распространения неопределенности применяласть к двум PIV измерениям турбулентного потока. Первый - струйный поток

прямоугольного сечения, описанный в Neal et al (2015). Особенностью базы данных является то, что использовались две системы измерения PIV, а именно система измерения (MS) и система с высоким динамическим диапазоном (HDR). Последний состоит из двух камер в стереоскопической конфигурации и имеет коэффициент увеличения, больший в 3 раза. По сравнению с измерениями с помощью термоанемометра Neal et al (2015) система HDR дает примерно в 4 раза более точные результаты по отношению к МС. Как следствие, скорость HDR может использоваться в качестве эталона для получения ошибки данных MS. Параметры эксперимента приведены в таблице 2. Измерения проводились при x / h = 20, где x – направление потока и h - высота струи, где турбулентный поток находится в турбулентном режиме.

Изображения MS обрабатывались с помощью LaVision DaVis 8.2 с окном опроса 16 × 16 пикселей с гауссовским взвешенным окном и коэффициентом перекрытия 75%. Для HDR-изображений были выбраны окна с заросом 48 × 48 пикселей с гауссовским взвешиванием и 75% -ным коэффициентом перекрытия. Обратите внимание, что из-за разницы в оптическом коэффициенте увеличения разные окна опроса дали примерно одинаковое пространственное разрешение для двух систем. Поле скоростей HDR было окончательно наложено на систему координат MS. Среднее по скоростям поле и интенсивность турбулентности, определяемые как …, показаны на рисунке 10: интенсивность турбулентности составляет около 12% от скорости осредненной по времени.

Второй эксперимент представляет собой измерение PIV потока в каверне. Эксперимент ведется в М-туннеле, представляющей малоскоростную аэродинамическую трубу открытого типа со свободной струей в лабораторий TU Delft. В аэродинамической трубе имеется квадратная испытательная секция 40 × 40 см2. В аэродинамической трубе имеется квадратная испытательная секция 40 × 40 см2. Модель полости сделана из дерева и имеет высоту H = 2 см и размер пролета W = 40 см.

Длина полости L = 24 см. Скорость свободного потока устанавливается равной 5 м с-1, что дает число Рейнольдса ReH = 6500 в зависимости от высоты полости. Ряд из 2000 некоррелированных пар изображений получается при частоте записи facq = 8,3 Гц. Поле зрения, которое составляет 70 × 55 мм2, расположено на 3 H ниже по потоку от начала полости. Получающийся коэффициент увеличения составляет 0,093. Параметры эксперимента в полостном потоке приведены в таблице 3. Эскиз эксперимента по протеканию полости показан на рисунке 11. Более подробная информация об эксперименте приведена в Iannetta et al (2016).

4.2.1 Неопределенность завихренности

Для оценки неопределенности завихренности используются данные прямоугольной струи. Временные ряды скорости извлекаются в точке P = (398, 246), как показано на рисунке 10. На рисунке 12 показана часть временного ряда для временного интервала 10 мс. Сравнение данных MS и HDR во всем временном ряду дает ошибку для MS, представленную в таблице 4. Замечено, что: (a) два компонента ошибки δu и δv имеют сопоставимую величину; (б) случайная составляющая ошибки (стандартное отклонение ошибки) значительно больше, чем разность средних составляющих компонент.

Завихренность вычисляется с помощью центрально-разностной схемы уравнения (40) с шагом сетки d = 4 px. Временные ряды завихренности в течение первых 10 мс показаны на рисунке 13. HDR и MS дают такую же пиковую завихренность (ωmax = - 0,15 px / px при t = 2,2 мс), что подтверждает, что обе системы имеют одинаковое пространственное разрешение. Ошибка вихря δω вычисляется как разность между завихренностью MS и HDR. Результаты таблицы 4 показывают, что случайная ошибка доминирует над ошибкой среднего смещения.

Неопределенность в P оценивается при помощи методом корреляционной статистики (Wieneke 2015). Распространение неопределенности определяется согласно уравнению (42) с использованием d = 4 px, U = (Uu + Uv) / 2 и ρ (2d) = 0,45. Среднеквадратичная неопределенности равна Uu, rms = 0,063 px и Uv, rms = 0,064 px, что очень хорошо согласуется со среднеквадратичным значением ошибки 0,060 и 0,063 соответственно. Вычисление повторяется во всей области измерения, общей между HDR и MS. Диаграммы на рисунке 14 иллюстрируют сравнение между среднеквадратичной погрешностью и неопределенностью завихренности. Как неопределенность, так и погрешность проявляют небольшие отклонения внутри рассматриваемой области со значениями от 0,010 до 0,016 px / px. Опять же, оцененные неопределенности и ошибки очень хорошо согласуются между собой.

4.2.2. Неопределенность статистических величин.

Данные, полученные с учетом времени, не подходят для статистического анализа, поскольку малое эффективное количество независимых образцов (Neff = 243, несмотря на общее количество выборок N = 8000) не гарантирует статистической сходимости результатов. Следовательно, для оценки неопределенности статистических свойств потока используются данные потока полости, в которых доступно статистически независимое поле скорости.

Данные скорости извлекаются в точке P, расположенной вблизи точки присоединения; интенсивность турбулентности в Р равна 22,0% от скорости свободного потока. Весь набор 2000 образцов разделен на 100 независимых подмножеств, состоящих из 20 выборок каждый. Статистические свойства потока, а именно временные средние и напряжения Рейнольдса, вычисляются из подмножеств и сравниваются со значением, полученным со всем множеством. На рисунке 15 (слева) показано сравнение усредненной по времени вертикальной скорости, вычисленной с подмножествами из 20 выборок и оцененной из всего набора 2000 образцов. Графы неопределенности оцениваются с помощью уравнения (15) и соответствуют теоретическому уровню достоверности 68%. В большинстве случаев результаты согласуются с неопределенностью измеренной средней скорости. Для оценки точности формул распространения неопределенности рассчитывается охват неопределенности для разных статистических величин и отображается на рисунке 15 (справа). Покрытие неопределенности определяется как количество выборок, для которых ошибка меньше или равна оценочной неопределенности. В случае гауссовского распределения ошибок теоретическое покрытие неопределенности составляет около 68%. Результаты на рисунке 15 (справа) показывают точность методологии распространения неопределенности: неопределенность усредненных по времени величин (u и v) является точной в пределах 5%, тогда как напряжения Рейнольдса точны в пределах 10%.

Влияние количества выборок на точность статистических результатов показано на рисунке 16. Очевидно, что случайная неопределенность среднего (рис. 16 (а)) первоначально велика и уменьшается с увеличением размера выборки. Во всем диапазоне рассмотренных размеров образцов эталонная средняя скорость находится в пределах оценок неопределенности, оцененных с помощью уравнения (15).

Аналогично, нормальное напряжение Рейнольдса Rvv сходится к эталонному значению со скоростью 1 / N (рис. 16 (b)). Для небольшого размера выборки (N <250) измеренное значение Rvv переоценивает контрольное значение из-за влияния паразитных колебаний примерно на 10%. Исправленное значение Rvv вычисляется путем вычитания среднеквадратичной флуктуации: R vv, corr = Rvv-U2 rms. Неопределенность нескорректированного и скорректированного R vv вычисляется через уравнения (18) и (23) соответственно. Две неопределенности одинаковы в пределах 1%, что означает, что неопределенность Rvv обусловлена главным образом статистической конвергенцией, а не неопределенностью измерений u и v. Для коррекции менее 1% требуется, по меньшей мере, 20 000 независимых выборок согласно уравнению (24) до того, как неопределенность напряжения Рейнольдса уменьшится до того же уровня, что и корректирующий член U rms 2. Но коррекция, тем не менее, полезна для низких уровней напряжения Рейнольдса, сравнимого с неопределенностями.

Касательные напряжение Рейнольдса Ruv показано на рис. 16 (с). Для вычисления неопределенности URuv рассчитывается коэффициент взаимной корреляции между u и v: ρuv = 0,41. Измеренный R uv сходится к эталонному значению со скоростью 1 / N. Поскольку расчетная неопределенность также уменьшает погрешность измерения (разность между измеренным и опорным значением) с увеличением размера выборки.

**Заключение**

В настоящем исследовании предлагается математическая основа для распространения неопределенности мгновенных измерений в отношении интересующих производных величин, как мгновенных (например, производных скорости, завихренности, расходимости), так и статистических (среднее значение напряжений Рейнольдса, TKE). Структура основывается на использовании линейного распространения ошибок.

Для статистических величин в неопределенности обычно преобладают случайные ошибки из-за конечного размера выборки. Неопределенность уменьшается с / N 1 eff, являясь Neff эффективным числом независимых выборок. Замечено, что во многих экспериментах PIV, проводимых в режиме непрерывной скорости, Neff может быть значительно ниже, чем общее количество образцов N, что дает неопределенность статистических величин, больших, чем полученная, когда образцы статистически независимы. Количественная оценка неопределенности статистических величин не требует знания неопределенности мгновенных полей скоростей. Тем не менее, мгновенная неопределенность позволяет исправить нормальное напряжение Рейнольдса для паразитных флуктуаций из-за случайных ошибок. Фактически, в отсутствие систематических ошибок из-за пиковой блокировки или пространственной модуляции, случайные ошибки влияют на увеличение измеренного нормального напряжения Рейнольдса по отношению к фактическому. Неопределенность пространственных производных скорости (например, завихренность и расходимость) зависит от пространственной корреляции ошибки измерения по направлениям х и у. Последнее связанных с пространственным разрешением измерения, которое можно оценить из суммы значений пространственной автокорреляции ошибки. Хотя корреляция ошибок обычно неизвестна в эксперименте, можно оценить априорное моделирование методом Монте-Карло для заданного набора параметров обработки PIV.

Предлагаемая методология распространения неопределенности оценивается с помощью моделирования и экспериментов по методу Монте-Карло. Моделирование методом Монте-Карло показало точность оценочной неопределенности для различных условий тестирования (размер выборки, дисперсия сигнала, корреляция ошибок) в предположении гауссовского распределения ошибок по скорости. В экспериментальной оценке эталонная скорость либо известна (эксперимент с поворотным столом), либо оценивается с помощью вспомогательной системы PIV с более высоким динамическим диапазоном (эксперимент с турбулентным потоком), как это сделано в Neal et al (2015), или оценивается с использованием более крупного образца размер для статистической конвергенции. Из экспериментальной оценки можно сделать три основных вывода:

1. При правильном учете пространственной корреляции ошибки неопределенность вихря оценивается, как правило, с точностью 5-10%.
2. Когда фактические флуктуации потока больше, чем мгновенные неопределенности, в неопределенности статистических величин преобладает конечный размер выборки, а не случайные мгновенные неопределенности.
3. Неопределенность усредненных по времени величин (u и v) точна в пределах 5%, тогда как напряжение Рейнольдса является точным в пределах 10%.