

УТВЕРЖДЕНО
приказом ФИЦ КазНЦ РАН
от 02.12.2025 № 14-АО

Разработано и рекомендовано к утверждению
Ученым советом ИЭПТ ФИЦ КазНЦ РАН
28 ноября 2025 г., протокол № 14

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Математическая теория пластичности»

Составная часть
**ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ -
программы подготовки научных и научно-педагогических кадров
в аспирантуре**

Научные специальности

1.1.8 МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

СОДЕРЖАНИЕ

1. Виды учебной деятельности, способ и формы ее проведения, трудоемкость дисциплины.
2. Перечень планируемых результатов обучения.
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы.
4. Содержание дисциплины.
5. Учебно-тематический план занятий
6. Формы текущего контроля и промежуточной аттестации, критерии оценки.
7. Перечень учебной литературы и ресурсов сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.
8. Описание материально-технической базы, необходимой для освоения дисциплины.

1. ВИДЫ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, СПОСОБ И ФОРМЫ ЕЕ ПРОВЕДЕНИЯ, ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

Виды учебной деятельности: аудиторные занятия – 27 часов, самостоятельная работа – 92 часа, зачет - 1 час, всего – 120 часов.

Форма проведения аудиторных занятий – лекции, семинары, консультации.

Аспирант должен обладать навыками самостоятельного освоения изучаемого материала. В рамках часов самостоятельной работы по указанию преподавателя аспиранты прорабатывают темы и осваивают теоретические вопросы, излагаемые в лекционном курсе, а также самостоятельно изучают другие вопросы программы.

Формой итогового контроля является зачет.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

В результате освоения дисциплины аспирант должен обладать следующими компетенциями:

2.1. Универсальные компетенции:

- способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2).

2.2. Общепрофессиональные компетенции:

- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2).

2.3. Профессиональные компетенции:

- способность собирать и анализировать мировые научные знания о фундаментальных основах современной механики деформируемого твердого тела и формулировать направления самостоятельных исследований (ПК-1);
- владение основами современных методов экспериментальной механики деформируемого твердого тела (ПК-2).

3. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Математическая теория пластичности» является дисциплиной основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по научной специальности 1.1 Математика и механика. Дисциплина направлена на подготовку к кандидатскому экзамену по направлению «Механика деформируемого твердого тела».

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Данная дисциплина базируется на знаниях и умениях, выработанных при прохождении общих профессиональных курсов материаловедения, сопротивления материалов, механики деформируемого твердого тела в рамках магистерской программы образования или специалитета. Владением данными знаниями и умениями устанавливается в ходе вступительных испытаний в аспирантуру.

В результате освоения дисциплины аспирант должен получить дополнительные знания, умения и навыки.

Цели и задачи освоения дисциплины - получение и последующее применение знаний о механике деформируемого твердого тела для решения теоретических и практических научных задач.

Для достижения поставленной цели и приобретения практических навыков обучающийся должен уметь решать следующие задачи:

- ознакомиться с основными положениями дисциплины;
- научиться обоснованно применять расчетные модели и методы к прикладным научным задачам;
- ознакомиться с методами численного решения задач механики, реализованными в современных математических программных комплексах.

5. УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Наименование разделов и тем	Аудит. работа	Самост. работа	Всего часов
1.	Механика и термодинамика сплошных сред	9	31	40
1.1.	Понятие сплошного тела. Гипотеза сплошности. Физически и геометрически малый элемент.	3	10	13

	Деформация элемента сплошной среды. Два способа описания деформации сплошного тела. Координаты Эйлера и координаты Лагранжа. Переход от Эйлера к Лагранжу и обратно.			
1.2.	Тензор деформации Коши-Грина. Геометрический смысл компонент тензора деформации Грина. Тензор деформации Альманси. Геометрический смысл компонент тензора деформации Альманси. Условия совместности деформаций. Формулировка условий совместности деформаций в цилиндрической и сферической системе координат. Вычисление тензора малых деформаций по заданному полю перемещений. Формулы Чезаро.	3	10	13
1.3.	Классификация сил в механике сплошных сред: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Тензоры напряжений Коши, Пиолы и Кирхгофа. Законы сохранения механики сплошных сред: уравнения баланса массы, импульса, момента импульса, кинетической, потенциальной и полной энергии. Термодинамические процессы и циклы. Термодинамические параметры состояния. Понятие о работе, теплоте, внутренней энергии, температуре и энтропии. Первый и второй законы термодинамики. Термодинамические потенциалы состояния. Общие формы определяющих соотношений механики сплошных сред. Физическая	3	11	14

	размерность. Анализ размерностей и П-теорема. Автомодельные решения.			
2.	Теория упругости	9	31	40
2.1.	Упругое деформирование твердых тел. Упругий потенциал и энергия деформации. Линейно–упругое тело Гука. Понятие об анизотропии упругого тела. Тензор упругих модулей. Частные случаи анизотропии: трансверсально изотропное и ортотропное упругое тело. Упругие модули изотропного тела.	3	10	13
2.2.	Полная система уравнений теории упругости. Уравнения Ламе в перемещениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла в напряжениях. Граничные условия. Постановка краевых задач математической теории упругости. Основные краевые задачи. Принцип Сен-Венана	3	10	13
2.3.	Общие теоремы теории упругости: теорема Клапейрона, тождество взаимности, теорема единственности. Вариационные принципы теории упругости: принцип минимума полной потенциальной энергии, принцип минимума дополнительной энергии, принцип Рейснера. Теоремы Кастильяно. Теорема Бетти.	2	5	7
2.4.	Плоское напряженное и плоское деформированное состояние. Плоская задача теории упругости. Метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили. Комплексное представление напряжений и перемещений. Уравнения плоской задачи теории упругости в полярных координатах. Задача Гриффитса	1	6	7

3.	Теория пластичности	9	30	39
3.1.	Пластическое деформирование твердых тел. Предел текучести. Упрочнение. Остаточные деформации. Идеальная пластичность. Физические механизмы 2 пластического течения. Понятие о дислокациях. Локализация пластических деформаций. Линии Людерса-Чернова. Идеальное упругопластическое тело. Идеальное жесткопластическое тело. Пространство напряжений. Критерий текучести и поверхность текучести. Критерии Треска и Мизеса. Пространство главных напряжений. Геометрическая интерпретация условий текучести. Условие полной пластичности	3	10	13
3.2.	Упрочняющееся упругопластическое тело. Упрочняющееся жесткопластическое тело. Функция нагружения, поверхность нагружения. Параметры упрочнения. Законы связи между напряженным и деформированным состояниями в теории течения. Принцип Мизеса. Постулат Друккера. Ассоциированный закон пластического течения. Теория скольжения. Краевые задачи теории течения. Теоремы единственности. Вариационные принципы теории течения. Теория предельного равновесия. Статическая и кинематическая теоремы теории предельного равновесия. Верхние и нижние оценки.	3	10	13

3.3.	Пластическое плоское деформированное состояние. Уравнения для напряжений и скоростей деформаций. Статически определимые и неопределимые задачи. Свойства линий скольжения. Методы решения основных краевых задач теории плоской пластической деформации. Задача Прандтля о вдавливании штампа. Пластическое плоское напряженное состояние. Уравнения для напряжений и скоростей при условии пластичности Мизеса. Деформационные теории пластичности. Теория Генки. Теория малых упруго пластических деформаций А.А. Ильюшина. Теорема о разгрузке. Метод упругих решений, переменной жесткости с касательными напряжениями. Пространство главных напряжений, изотропное и кинематическое упрочнение	3	10	13
Зачет		1		1
Всего		28	92	120

6. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

6.1. Текущий контроль.

Текущий контроль освоения дисциплины проводится регулярно, начиная со второй недели обучения, в форме контроля посещаемости, устного опроса по изучаемой теме. Формой итогового контроля по дисциплине является зачет. Зачет проводится по вопросам.

Вопросы к зачету:

Глава 1. Механика и термодинамика сплошных сред

1. Понятие сплошного тела.
2. Гипотеза сплошности.
3. Физически и геометрически малый элемент.

4. Деформация элемента сплошной среды.
5. Два способа описания деформации сплошного тела.
6. Координаты Эйлера и координаты Лагранжа.
7. Переход от Эйлера описания к Лагранжеву и обратно.
8. Тензор деформации Коши-Грина.
9. Геометрический смысл компонент тензора деформации Грина.
10. Тензор деформации Альманси.
11. Геометрический смысл компонент тензора деформации Альманси.
12. Условия совместности деформаций.
13. Формулировка условий совместности деформаций в цилиндрической и сферической системе координат.
14. Вычисление тензора малых деформаций по заданному полю перемещений.
15. Формулы Чезаро.
16. Классификация сил в механике сплошных сред: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы.
17. Тензоры напряжений Коши, Пиолы и Кирхгофа.
18. Законы сохранения механики сплошных сред: уравнения баланса массы, импульса, момента импульса, кинетической, потенциальной и полной энергии.
19. Термодинамические процессы и циклы.
20. Термодинамические параметры состояния.
21. Понятие о работе, теплоте, внутренней энергии, температуре и энтропии.
22. Первый и второй законы термодинамики.
23. Термодинамические потенциалы состояния.
24. Общие формы определяющих соотношений механики сплошных сред.
25. Физическая размерность.
26. Анализ размерностей и П-теорема.
27. Автомодельные решения. Примеры.

Глава 2. Теория упругости

28. Упругое деформирование твердых тел.
29. Упругий потенциал и энергия деформации.
30. Линейно–упругое тело Гука.
31. Понятие об анизотропии упругого тела.
32. Тензор упругих модулей.
33. Частные случаи анизотропии: трансверсально изотропное и ортотропное упругое тело.

- 34. Упругие модули изотропного тела.
- 35. Полная система уравнений теории упругости.
- 36. Уравнения Ламе в перемещениях.
- 37. Уравнения Бельтрами-Митчелла в напряжениях.
- 38. Граничные условия.
- 39. Постановка краевых задач математической теории упругости.
- 40. Основные краевые задачи.
- 41. Принцип Сен-Венана.
- 42. Общие теоремы теории упругости: теорема Клапейрона, тождество взаимности, теорема единственности.
- 43. Вариационные принципы теории упругости: принцип минимума полной потенциальной энергии, принцип минимума дополнительной энергии, принцип Рейснера.
- 44. Теоремы Кастильяно.
- 45. Теорема Бетти. Примеры.
- 46. Плоское напряженное и плоское деформированное состояние.
- 47. Плоская задача теории упругости.
- 48. Метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили.
- 49. Комплексное представление напряжений и перемещений.
- 50. Уравнения плоской задачи теории упругости в полярных координатах.
- 51. Задача Гриффитса.

Глава 3. Теория пластичности

- 52. Пластическое деформирование твердых тел.
- 53. Предел текучести. Упрочнение.
- 54. Остаточные деформации.
- 55. Идеальная пластичность.
- 56. Физические механизмы 2 пластического течения.
- 57. Понятие о дислокациях.
- 58. Локализация пластических деформаций.
- 59. Линии Людерса-Чернова.
- 60. Идеальное упругопластическое тело.
- 61. Идеальное жесткопластическое тело.
- 62. Пространство напряжений.
- 63. Критерий текучести и поверхность текучести.
- 64. Критерии Треска и Мизеса.
- 65. Пространство главных напряжений.
- 66. Геометрическая интерпретация условий текучести.
- 67. Условие полной пластичности.

68. Упрочняющееся упругопластическое тело.
69. Упрочняющееся жесткопластическое тело.
70. Функция нагружения, поверхность нагружения.
71. Параметры упрочнения.
72. Законы связи между напряженным и деформированным состояниями в теории течения.
73. Принцип Мизеса.
74. Постулат Друккера.
75. Ассоциированный закон пластического течения.
76. Теория скольжения.
77. Краевые задачи теории течения.
78. Теоремы единственности.
79. Вариационные принципы теории течения.
80. Теория предельного равновесия.
81. Статическая и кинематическая теоремы теории предельного равновесия.
82. Верхние и нижние оценки предельного равновесного состояния. Примеры.
83. Пластическое плоское деформированное состояние.
84. Уравнения для напряжений и скоростей деформаций.
85. Статически определимые и неопределимые задачи.
86. Свойства линий скольжения.
87. Методы решения основных краевых задач теории плоской пластической деформации.
88. Задача Прандтля о вдавливании штампа.
89. Пластическое плоское напряженное состояние.
90. Уравнения для напряжений и скоростей при условии пластичности Мизеса.
91. Деформационные теории пластичности.
92. Теория Генки.
93. Теория малых упруго пластических деформаций А.А. Ильюшина.
94. Теорема о разгрузке.
95. Метод упругих решений.
96. Метод переменной жесткости с касательными напряжениями.
97. Пространство главных напряжений, изотропное и кинематическое упрочнение

6.2. Критерии оценки итогового контроля:

«зачтено»	Вопрос раскрыт, основные идеи, алгоритмы и подходы изложены
«не зачтено»	Вопрос не раскрыт или раскрыт частично, основные идеи, алгоритмы и подходы не изложены

При выборе аспирантом дисциплины «Теория ползучести» в качестве элективной, зачет по дисциплине является допуском к промежуточной аттестации – кандидатскому экзамену по специальной дисциплине.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

7.1. Литература (жирным шрифтом выделена основная литература)

- 1. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.**
- 2. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во Академия наук, 1963.**
- 3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.**
- 4. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979.**
- 5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.**
- 6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.**
- 7. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985.**
- 8. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2-х томах. М.: Наука, 1983, 1984.**
- 9. Черепанов Г.П. Механика разрушения, 2012**
- 10. Шлянников В.Н. Вычислительная механика деформирования и разрушения. Казань, Издательство КГЭУ, 2002.**
- 11. Jacob Lubliner. PLASTICITY THEORY. University of California at Berkeley. 2022**
- 12. Z. R. Wang, Weilong Hu, S. J. Yuan. Engineering Plasticity: Theory and Applications in Metal Forming, 2018**
- 13. Anand, Lallit, Govindjee, Sanjay «Continuum Mechanics of Solids», Oxford University Press, 2020.**
- 14. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.**
- 15. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.**
- 16. Сапунов В.Т. Основы теории пластичности и ползучести. М.: МИФИ, 2008**

7.2. Электронные ресурсы

1. Российская государственная библиотека - <https://www.rsl.ru/>
2. Национальная библиотека Республики Татарстан - <https://kitaphane.tatarstan.ru/>
3. Платформа научной электронной библиотеки e-Library.ru - <http://www.elibrary.ru>
4. Электронная платформа издательства SPRINGER - <http://www.springerlink.com>
5. ЭБС «Университетская библиотека онлайн» - <http://www.biblioclub.ru/>
6. Издательство «Просвещение» - prosv.ru
7. Издательство «ФИЗМАТЛИТ» - <https://fml.ru/>
8. Издательство «Лань» - <https://lanbook.com/>

8. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекционные занятия и консультации, самостоятельная работа по освоению дисциплины и подготовка к сдаче кандидатских экзаменов проводятся в специальных помещениях (читальный зал научной библиотеки и/или конференц-залы), оборудованных мебелью (столы, стулья), классной доской (меловой), компьютером, проектором для демонстрации презентаций